بررسی ارتعاشات اجباری میز ماشین‌ابزار هگزاپاد*

مهران محبوب خواه[۱] سیامک پدرام مهر[۲]

چکیده *در این مقاله، ارتعاشات اجباری میز هگزاپاد مورد مطالعه‌ی تحلیلی قرار گرفته است. با در نظر گرفتن نیروی خارجی اعمال شده روی سکوی متحرک میز هگزاپاد به‌صورت یک نیروی سینوسی متغیر با زمان، ارتعاشات اجباری سکو مورد بررسی قرار گرفته است. فرکانس‌های تشدید و میزان تغییر مکان‌های سکو نیز در جهات مختلف حرکتی محاسبه شده‌اند. صحت نتایج به‌دست‌آمده از روش تحلیلی با شبیه‌سازی به روش اجزای محدود مورد بررسی قرار گرفته است. علاوه بر این، با مدل‌سازی نیروهای هارمونیک حاصل از عملیات فرزکاری، ارتعاش اجباری مکانیزم تحت نیروهای خشنکاری و پرداختکاری در روش‌های فرزکاری مخالف و موافق مورد مطالعه قرار گرفته و دامنه و فرکانس‌های تشدید حاصل از این نیروها نیز محاسبه شده‌اند. با شناخت فرکانس‌های تشدید و دامنه‌ی نوسانات میز، موقعیت‌های مختلفی که قرارگیری میز در آن‌ها موجب بروز ناپایداری دینامیکی سیستم می‌شود مورد بررسی قرار گرفته‌اند.*

واژه‌های کلیدی هگزاپاد، ارتعاشات اجباری، نیروهای ماشینکاری.

Forced Vibration Analysis of Machine Tools' Hexapod Table

M. Mahboubkhah S. Pedrammehr

Abstract *In this paper, an analytical study of the forced vibrations of hexapod table is studied. Considering external force as a time sinusoid force, forced vibrations of the platform are investigated. Resonance frequencies and vibrations of the moving platform are also calculated in different directions. The results of the analytical approach are verified using FEM simulation. Modelling the harmonic milling forces, a careful examination of the forced vibration are carried out in different cutting conditions and different configurations. Resonance frequencies and the range of vibrations are then calculated. Finally, knowing the resonance frequencies and the vibrations of hexapod table, different configurations of the table, which results in dynamic instability, are investigated.*

Key Words Hexapod, Forced vibration, Machining forces.

---

* تاریخ دریافت مقاله ۹۰/۳/۲۳ و تاریخ پذیرش آن ۹۲/۱/۲۰ می‌باشد.

(۱) نویسنده‌ی مسؤول: دانشیار دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز.

(۲) دانش‌آموخته کارشناسی ارشد، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز.

مقدمه

در سال‌های اخیر استفاده از مکانیزم‌های موازی به‌عنوان میز یا اسپیندل ماشین‌ابزار، که نیاز به اجزای دقیق، سفت و قابل کنترل دارد، گسترش چشمگیری داشته است. با توجه به استفاده از چندین زنجیره‌ی سینماتیکی به‌صورت موازی در این مکانیزم‌ها، دقت و توانایی استهلاک ارتعاشات در این نوع مکانیزم‌ها تا حد زیادی قابل دست‌یابی می‌باشد. امکان حذف یا کاهش ارتعاشات، که از مهم‌ترین علل کاهش دقت و کیفیت سطوح ماشینکاری می‌باشد، با شناخت دینامیک مکانیزم و رفتار ارتعاشی آن امکانپذیر است. بررسی روش‌های دست‌یابی به این هدف یکی از تحقیقات مهم در این زمینه بوده و کم‌تر به آن پرداخته شده است.

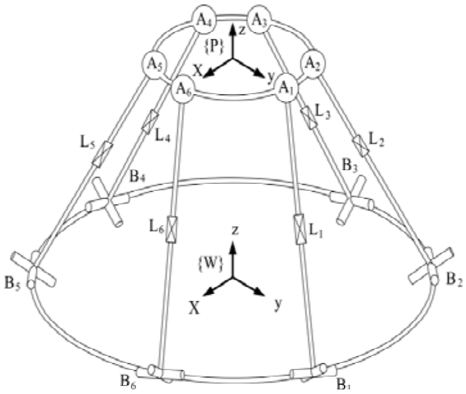
شناخت و کنترل ارتعاشات در ماشین‌های ابزار و مکانیزم‌های مختلف، برای بهبود عملکرد و افزایش بازده کاری آن‌ها، یکی از زمینه‌های مطالعاتی مهم مهندسان و محققان می‌باشد. داهنر و همکارانش [1]، با ساده‌سازی‌های بخش‌های پیچیده و اعمال انعطاف‌پذیری به اجزای مختلف اسپیندل، کاهش و حذف فعال لرزه را به‌کمک محرک‌های کمکی در ماشین هگزاپاد اوکتاهدرال مورد بررسی قرار داده‌اند؛ در تحقیق آن‌ها خواص مادی ابزار، اسپیندل، نگهدارنده‌ی ابزار و یاتاقان‌ها مطابق با نتایج عملی مدل‌سازی شده و مدل اجزای محدود برای هر دو نوع ابزارهای سفت و انعطاف‌پذیر مورد مطالعه قرار گرفته است. در نهایت، با شناسایی خصوصیات دینامیکی و ارتعاشی مکانیزم، محرک‌هایی برای کنترل اسپیندل انتخاب شده و ارتعاشات حاصل از فرآیند ماشینکاری قطعه‌ای با پارامترهای برشی مشخص به‌صورت حلقه‌بسته کنترل شده است. در تحقیقاتی که توسط هردیج و وینز [2] انجام شده است، ماشین‌ابزار هگزل تورنادو ۲۰۰۰ مورد مطالعه‌ی مودال قرار گرفته و مدل انعطاف‌پذیر ماشین‌ابزار به روش اجزای محدود بررسی شده است. در نهایت، متناسب با تغییرات پیکربندی سازه، تغییرات فرکانس‌های تشدید و سفتی ماشین‌ابزار اعلام شده است. در تحقیق دیگری وینز و هردیج [3] مشخصات سازه‌ای ماشین‌های ابزار موازی را مورد مطالعه قرار داده و مدل تحلیلی مناسبی را برای شبیه‌سازی پاسخ ارتعاشی و پارامترهای مودال این نوع ماشین‌های ابزار ارائه نموده‌اند. در پایان، صحت مدل تحلیلی ارائه‌شده در تحقیق آن‌ها توسط تست مودال مورد بررسی قرار گرفته است. تینگ و همکارانش [4]، دینامیک ماشین CNC بر پایه‌ی مکانیزم استوارت را به روش اولر-لاگرانژ مورد بررسی قرار داده‌اند؛ در تحقیق آن‌ها، نیروی میانگین برش در فرآیند فرزکاری به‌عنوان نیروی اعمال‌شده به مکانیزم مد نظر قرار گرفته است. موخرجی و همکارانش [5]، دینامیک و ارتعاشات مکانیزم استوارت را با روش نیوتن-اولر به‌صورت تحلیلی مدل‌سازی نموده‌اند. در تحقیق آن‌ها با محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی مکانیزم و محاسبه‌ی تغییر مکان‌ها تحت اثر نیروی معین، پایداری دینامیکی سیستم مورد بررسی قرار گرفته است. هانگ و همکارانش [6]، مدل ارتعاشی یک ماشین‌ابزار موازی را به‌صورت تحلیلی مورد مطالعه قرار داده‌اند. در مدل ارائه‌شده‌ی آن‌ها پایه‌های مکانیزم به‌صورت سیستم‌های فنر و مستهلک‌کننده مدل‌سازی شده است. در تحقیق آن‌ها، نمودارهای پایداری دینامیکی یک ماشین‌ابزار موازی، با ترکیب مدل ارتعاشی مکانیزم با مدل دینامیک برش، استخراج شده است. محبوب‌خواه و همکارانش [7,8]، با دو روش تحلیلی متفاوت، ارتعاشات آزاد و محدوده‌ی فرکانس‌های طبیعی مکانیزم هگزاپاد را برای پیکربندی‌های مختلف آن مورد بررسی قرار داده‌اند؛ به‌طوری‌که در یک روش از جرم پایه‌ها صرف‌نظر شده و سفتی معادل هر پایه در دستگاه معادلات ارتعاشی مربوط به سکوی متحرک اعمال شده است و در روش دیگر جرم پایه‌ها نیز در

محاسبات مربوط بـه ارتعاشـات آزاد مکـانیزم در نظـر گرفته شده‌اند. در تحقیق آن‌هـا، فرکـانس‌هـای طبیعـی به‌دست‌آمده از روش‌های تحلیلی بـرای فرکـانس‌هـای طبیعی با نتایج حاصل از روش اجـزای محـدود مـورد مقایسه قرار گرفته‌اند. پدرام مهر و همکـارانش [9] نیـز با دو روش تحلیلـی متفـاوت فرکـانس‌هـای طبیعـی و شکل‌های مـود میـز هگزاپـاد را بـرای پیکربنـدی‌هـای مختلف آن مورد بررسی قرار داده‌اند.

در این تحقیق، با در نظر گـرفتن نیـروی خـارجی اعمال‌شده روی سکوی متحرک میز هگزاپاد به‌صـورت یک نیروی سینوسی، ارتعاشـات اجبـاری سـکو مـورد بررسی قرار گرفته است. سپس، فرکانس‌های تشـدید و میزان تغییر مکان‌های سکو در جهات مختلف حرکتـی تحـت برنامـه‌ای کـه در محـیط نـرم‌افـزار MATLAB نوشته شـده اسـت، محاسـبه شـده‌انـد. صـحت نتـایج به‌دست‌آمده از روش تحلیلی با شـبیه‌سـازی بـه روش اجزای محدود نیز مورد بررسی قرار گرفته و با استفاده از تحلیل هارمونیک در نرم‌افزار ANSYS فرکانس‌های تشدید و میزان تغییر مکان‌های سکو در آن فرکانس‌هـا به‌دست آمده‌اند. علاوه بر این، با مدل‌سـازی نیروهـای هارمونیـک حاصـل از عملیـات فرزکـاری، ارتعـاش اجبـــاری مکـــانیزم تحـــت نیروهـــای خشـــنکاری و پرداختکاری در روش‌های فرزکاری مخـالف و موافـق مورد مطالعه قرار گرفته و دامنه و فرکانس‌های تشـدید حاصل از این نیروها نیز محاسبه شده‌اند. از آنجایی که فرکانس‌هـای طبیعـی و تشـدید مکـانیزم بـا تغییـر در پیکربندی میز دچار تغییر می‌شوند؛ محدوده‌ی کاملی از فرکانس‌های تشدید میز در پیکربندی‌های مختلف و در شرایط مختلف ماشینکاری محاسبه شده‌اند. در نهایـت، با شناخت فرکانس‌های تشدید و دامنهٔ نوسـانات سـکو در اثر نیروهای ماشینکاری اعمال‌شـده، موقعیـت‌هـای مختلفی کـه قرارگیـری سـکو در آن‌هـا موجـب بـروز ناپایداری دینامیکی سیستم می‌شود مورد بررسـی قـرار گرفته‌اند.

معرفی میز هگزاپاد تحت بررسی

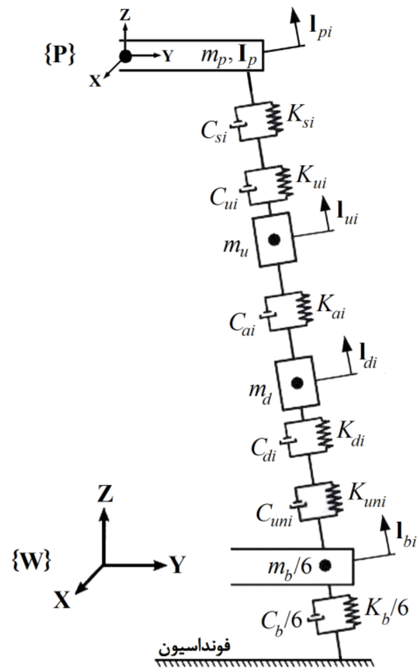
میز هگزاپاد تحت بررسی که در شـکل (۱) نشـان داده شده است، شامل یک سـکوی متحـرک، یـک سـکوی ثابت و شش پایهٔ با طول متغیر می‌باشد. ارتباط پایـه‌هـا به سکوی متحرک با مفاصل کروی $\{A_1,...A_6\}$ و به سکوی ثابت توسط مفاصـل یونیورسـال $\{B_1,...B_6\}$ می‌باشـد، مفاصـل کشـویی $\{L_1,...L_6\}$ نیـز بـین دو قسمت بالایی و پایینی هر پایه به‌کار گرفتـه مـی‌شـود. بدین ترتیب شش درجه‌ی آزادی برای هـر پایـه قابـل دست‌یابی می‌باشد. چارچوب متحرک $\{\mathbf{P}\}$ متصـل بـه سـکوی متحـرک در نظـر گرفتـه شـده اسـت و بـا آن حرکت می‌کنـد و چـارچوب مرجـع $\{\mathbf{W}\}$ متصـل بـه سکوی ثابت در نظر گرفته می‌شود. مرکز هر چارچوب منطبق بر مرکز سکوی مربوط به آن فرض شده اسـت. مشخصات ابعادی مکانیزم تحـت بررسـی در پیوسـت ارائه شده است.



شکل ۱ میز هگزاپاد تحت بررسی

در مدل ارتعاشی میز هگزاپاد مورد مطالعه در ایـن تحقیـق، قسـمت‌هـای بـالا و پـائین پایـه‌هـا، مفاصـل یونیورسال و کروی، سـکوی ثابـت و اتصـال سـکوی پائین بـه فوندانسـیون بـه‌عنـوان اجـزای انعطـاف‌پـذیر مکانیزم در نظر گرفته می‌شوند. از آن‌جایی که سـکوی متحرک می‌بایست در مقابل تغییرشـکل‌هـای ناشـی از

نیروهای خارجی مقاومت کند، در مقایسه با سایر اجزای مکانیزم به‌صورت یک جرم متمرکز صلب و با استهلاک سازه‌ای ناچیز در نظر گرفته می‌شود. فوندانسیون سازه نیز به‌دلیل داشتن حجم بزرگ و مواد صلب، در مقایسه با سایر اجزا، به‌صورت صلب در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۲ مدل ارتعاشی میز هگزاپاد

در شکل (۲) که نشان‌دهنده‌ی مدل ارتعاشاتی مکانیزم مورد نظر می‌باشد، تنها یک پایه‌ی مکانیرم در شکل نشان داده شده است. $\mathrm{m_b}$، $\mathrm{m_d}$ و $\mathrm{m_u}$ به‌ترتیب جرم سکوی پایینی، جرم قسمت پایینی و بالایی پایه بوده و $\mathrm{m_p}$ و $\mathbf{I}_\mathrm{p}$ نیز به‌ترتیب نشان دهنده‌ی مجموع جرم و تانسور لختی سکوی متحرک (به‌همراه بار روی آن) می‌باشند. $\mathbf{l}_{bi}$، $\mathbf{l}_{di}$، $\mathbf{l}_{ui}$ و $\mathbf{l}_{pi}$ به‌ترتیب تغییر مکان‌های سکوی پائین، مرکز جرم قسمت پائینی پایه، مرکز جرم قسمت بالایی پایه و مرکز مفصل کروی در امتداد محور طولی پایه‌ها می‌باشند (۱ تا ٦ برای هر شش پایه = i). C_b، C_{uni}، C_{di}، C_{ai}، C_{ui} و C_{si} به‌ترتیب ضرایب استهلاک سکوی پایینی، مفصل یونیورسال، قسمت پائینی پایه، مفصل کشویی، قسمت بالایی پایه و مفصل کروی بوده و K_b، K_{uni}، K_{di}، K_{ai}، K_{ui} و K_{si} به‌ترتیب ضرایب سفتی سکوی پایینی، مفصل یونیورسال، قسمت پائینی پایه، مفصل کشویی، قسمت بالایی پایه و مفصل کروی می‌باشند.

معادله‌ی ارتعاشی میز هگزاپاد

از آن‌جایی که رفتار دینامیکی سکوی متحرک به‌عنوان عملگر نهایی نقش ویژه‌ای در رفتار دینامیکی مکانیزم ایفا می‌کند، معادله‌ی ارتعاشی سکو با صرف‌نظر کردن از جرم پایه‌ها و تنها با در نظر گرفتن استهلاک و سفتی آن‌ها به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\mathbf{M}_\mathrm{V}\begin{bmatrix}\ddot{\mathbf{u}}_\mathrm{T}\\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_\mathrm{T}\end{bmatrix}+\mathbf{C}_\mathrm{V}\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{u}}_\mathrm{T}\\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_\mathrm{T}\end{bmatrix}+\mathbf{K}_\mathrm{V}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_\mathrm{T}\\ \boldsymbol{\theta}_\mathrm{T}\end{bmatrix}=\mathbf{F}_\mathrm{V} \qquad (۱)$$

به‌طوری که $\mathbf{u}_\mathrm{T}$، $\dot{\mathbf{u}}_\mathrm{T}$ و $\ddot{\mathbf{u}}_\mathrm{T}$ ($\boldsymbol{\theta}_\mathrm{T}$، $\dot{\boldsymbol{\theta}}_\mathrm{T}$ و $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_\mathrm{T}$) به‌ترتیب تغییرات کوچک در تغییر مکان، سرعت و شتاب خطی (دورانی) مرکز سکوی متحرک در چارچوب مرجع می‌باشند.

$\mathbf{M}_\mathrm{V}$، ماتریس جرم ٦×٦ معادلهٔ ارتعاشی سکو است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{M}_\mathrm{V}=\begin{bmatrix} m_p\mathbf{I}_3 & 0_{(3\times3)}\\ 0_{(3\times3)} & \mathbf{I}_p\end{bmatrix} \qquad (۲)$$

در رابطه‌ی فوق $\mathbf{I}_3$ بیانگر ماتریس همانی ۳×۳ می‌باشد.

$\mathbf{C}_\mathrm{V}$ و $\mathbf{K}_\mathrm{V}$ به‌ترتیب ماتریس‌های استهلاک و سفتی معادلهٔ ارتعاشی سکو هستند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{C}_\mathrm{V}=\mathbf{J}^{-\mathrm{T}}\mathbf{C}_\mathrm{T}\mathbf{J}^{-1} \qquad (۳)$$

$$\mathbf{K}_V = \mathbf{J}^{-T}\mathbf{K}_T\mathbf{J}^{-1} \qquad (٤)$$

به‌طوری که $\mathbf{J}^{-1}$ ماتریس ژاکوبین معکوس و $\mathbf{J}^{-T}$ ترانهاده‌ی آن می‌باشد. جزئیات مربوط به ماتریس ژاکوبین معکوس در پیوست ارائه شده است. $\mathbf{C}_T$ ماتریس ٦×٦ قطری می‌باشد که هر یک از درایه‌های روی قطر اصلی آن ضرایب استهلاک هر کدام از شش پایه‌ی مکانیزم، C_{Ti}، می‌باشند. $\mathbf{K}_T$ نیز ماتریس ٦×٦ قطری است که هر یک از درایه‌های روی قطر اصلی آن ضرایب سفتی هر یک از شش پایه، K_{Ti}، می‌باشند.

$\mathbf{F}_V$ نیز نیروی خارجی اعمال شده روی سکوی متحرک بوده و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{F}_V = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{F}_{ext} \\ \mathbf{R}(\mathbf{M}_{ext} + \mathbf{r}\times\mathbf{F}_{ext}) \end{bmatrix} \qquad (٥)$$

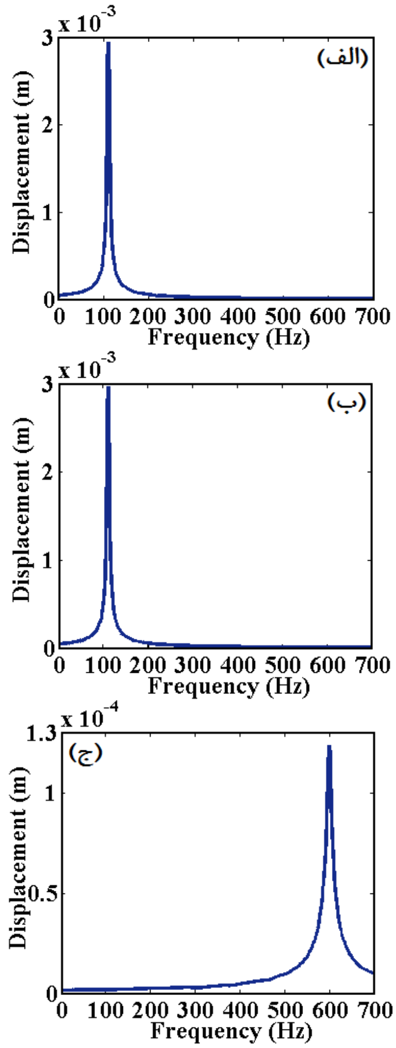
به‌طوری که $\mathbf{F}_{ext}$ و $\mathbf{M}_{ext}$ به ترتیب نیرو و گشتاور خارجی اعمال‌شده بر سکوی متحرک می‌باشند. $\mathbf{R}$ ماتریس دوران ۳×۳ نشان دهنده‌ی جهت‌گیری چارچوب متحرک نسبت به چارچوب مرجع است و $\mathbf{r}$ بردار موقعیت مرکز جرم سکوی متحرک بارگذاری‌شده در چارچوب مرجع می‌باشد. جزئیات مربوط به $\mathbf{R}$ و $\mathbf{r}$ در پیوست مورد بررسی قرار گرفته است.

بررسی ارتعاش اجباری هگزاپاد تحت نیروی معین

با در نظر گرفتن نیرو و ممان خارجی اعمال‌شده روی سکوی متحرک به‌صورت یک نیرو و ممان سینوسی متغیر با زمان، معادله‌ی (۱) در حالت کلی به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\mathbf{M}_V\begin{bmatrix}\ddot{\mathbf{u}}_T \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_T\end{bmatrix} + \mathbf{C}_V\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{u}}_T \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_T\end{bmatrix} + \mathbf{K}_V\begin{bmatrix}\mathbf{u}_T \\ \boldsymbol{\theta}_T\end{bmatrix} = \mathbf{F}_V\sin(\omega t) \qquad (٦)$$

ω فرکانس مربوط به نیرو و ممان سینوسی می‌باشد.

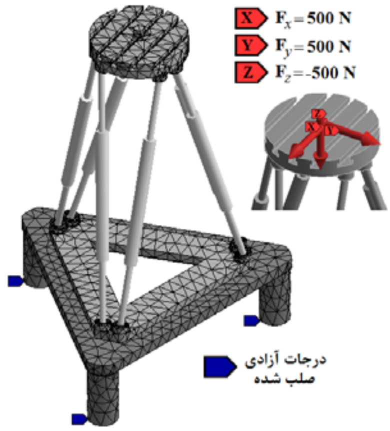


شکل ۳ تغییر مکان‌های سکوی متحرک به‌دست‌آمده از روش تحلیلی، در جهات مختلف و در مقیاس فرکانسی.
الف) در راستای X، ب) در راستای Y، ج) در راستای Z

رابطه‌ی (٦) نشان دهنده‌ی یک دستگاه شامل شش معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی دوم می‌باشد. بدین ترتیب با استفاده از دستور ODE45 تحت برنامه‌ای که در محیط نرم‌افزار MATLAB نوشته شده، ارتعاش اجباری مکانیزم مورد نظر مدل‌سازی شده و تغییر مکان‌ها و دوران‌های سکوی متحرک در جهات خطی $\mathbf{u}_T$ و دورانی $\boldsymbol{\theta}_T$ مورد بررسی قرار گرفته است. در

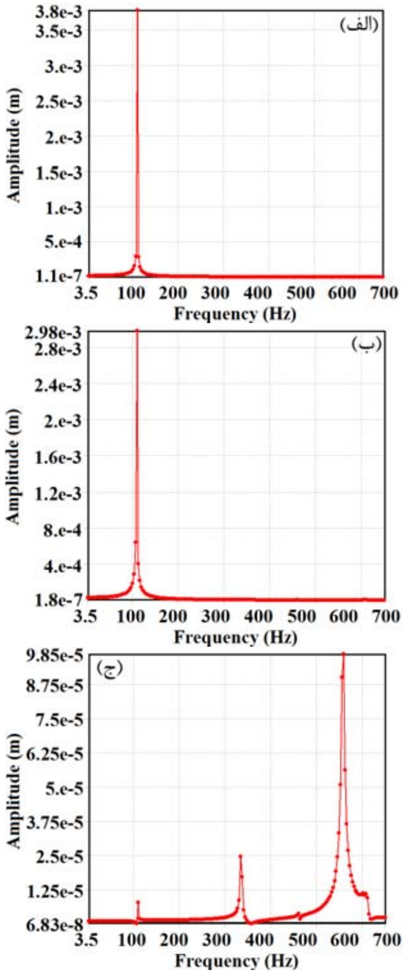
دستور ODE45، روابط بازگشتی مربوط به روش عددی رانگ-کوتا از مرتبه‌ی چهارم و پنجم برای حل معادله‌ی دیفرانسیل معمولی به کار گرفته می‌شود. به‌عنوان مثال، ارتعاش اجباری سکوی متحرک مورد بررسی قرار گرفته و نتایج شبیه‌سازی به روش تحلیلی در شکل (۳) نشان داده شده‌اند.

در تحلیل انجام‌شده، دامنه‌ی ثابت نیرو و ممان خارجی وارد بر سکوی متحرک به‌ترتیب $M_{ext}=0$ و $\mathbf{F}_{ext}=[۵۰۰\quad ۵۰۰\quad -۵۰۰]^T$ در نظر گرفته شده‌اند؛ میز هگزاپاد نیز در شرایطی در نظر گرفته شده است که در آن پایه‌ها به‌صورت کاملاً باز و سکوی متحرک در بالاترین موقعیت، بدون جهت‌گیری و بدون بار قرار دارد.



شکل ٤ مدل مش‌بندی‌شده‌ی مکانیزم به‌همراه شرایط تکیه‌گاهی و نیروهای خارجی اعمال‌شده روی سکو

به‌منظور بررسی صحت برنامه‌ی نوشته‌شده برای روش تحلیلی، ارتعاش اجباری میز هگزاپاد به‌روش اجزای محدود نیز مورد بررسی قرار گرفته است. در روش اجزای محدود، مکانیزم مورد نظر با استفاده از اطلاعات ابعادی مربوط به قسمت‌های مختلف مکانیزم و با حداکثر سعی برای حفظ دقت ابعادی اجزای مختلف سازه، در نرم‌افزار Solidworks به‌صورت سه‌بعدی و بدون پایه مدل‌سازی شده است. مدل ایجادشده به محیط Workbench نرم‌افزار ANSYS منتقل شده است. پس از قرار دادن سفتی و استهلاک معادل هر پایه (K_{Ti} و C_{Ti}) در آن قسمت، مدل اجزای محدود مکانیزم مورد نظر با در نظر گرفتن شرایط سازه‌ای به روش Tetrahedrons مش‌بندی شده است. با اعمال نیرو و ممان خارجی معین روی سکوی متحرک و نیز با در نظر گرفتن شرایط تکیه‌گاهی مناسب، مدل اجزای محدود مکانیزم مورد نظر برای تحلیل هارمونیک آماده‌سازی شده است (شکل ٤).



شکل ۵ تغییر مکان سکوی متحرک، به‌دست‌آمده از روش اجزای محدود در جهات مختلف و در مقیاس فرکانسی الف) در راستای X، ب) در راستای Y، ج) در راستای Z

شکل (۵) نشان دهنده‌ی دامنه‌های پاسخ فرکانسی سکوی متحرک در فرکانس‌های تشدید مختلف و

به‌ترتیب در جهات X، Y و Z می‌باشد که از قسمت Frequency Response و با استفاده از روش حل Full در تحلیل هارمونیک توسط نرم‌افزار ANSYS به‌دست آمده‌اند.

با در نظر گرفتن پیچیدگی هندسی مکانیزم هگزاپاد، می‌توان اظهار داشت که نتایج به‌دست‌آمده از دو روش مورد بررسی در این تحقیق، دارای هم‌خوانی و سازگاری مناسبی می‌باشند. اختلاف موجود بین نتایج دو روش را می‌توان به ساده‌سازی‌های انجام شده در روش تحلیلی، اعم از در نظر گرفتن سکوی متحرک به‌عنوان یک جرم متمرکز کاملاً صلب و محاسبه‌ی لختی سکو بدون در نظر گرفتن شیارهای T- شکل روی آن نسبت داد.

تغییرات مقدار نیرو و ممان خارجی اعمال‌شده روی سکو، تغییری در فرکانس‌های تشدید سکوی متحرک ایجاد نمی‌کند. بدیهی است این تغییرات در ارتباط مستقیم با تغییر در مقادیر دامنه‌ی تغییر مکان‌ها در جهات مختلف حرکتی می‌باشند.

بررسی ارتعاشات هگزاپاد تحت نیروهای ماشینکاری

زمانی که یک یا چند فرکانس نیروی برشی با یک یا چند فرکانس طبیعی مکانیزم مورد استفاده در ماشینکاری برابر و یا نزدیک به هم می‌باشند، بررسی پاسخ اجباری مکانیزم اهمیت ویژه‌ای در جلوگیری از بروز پدیده‌ی تشدید خواهد داشت؛ بنابراین مدل‌سازی نیروهای هارمونیک فرزکاری برای بررسی تحلیلی ارتعاشات اجباری مکانیزم امری ضروری می‌باشد. در این قسمت، برای بررسی دقیق مسأله‌ی ارتعاش اجباری حاصل از فرآیند ماشینکاری روی مکانیزم تحت مطالعه، نیروهای هارمونیک فرزکاری مدل‌سازی شده‌اند. حل مسأله‌ی ارتعاش اجباری مکانیزم مورد نظر در شرایط ماشینکاری و بررسی پاسخ اجباری آن نقش ویژه‌ای در اجتناب از قرارگیری در مواضع تشدید خواهد داشت.

مقادیر نیروها و ممان‌های ایجادشده حین عملیات فرزکاری، با در نظر گرفتن هندسه‌ی برش در شرایط ماشینکاری مختلف به‌صورت تحلیلی قابل محاسبه می‌باشند [10,11].

ارائه‌ی یک مدل جامع که توانایی پیش‌بینی دقیق فرآیند ماشینکاری را داشته باشد، بسته به مدل‌سازی دقیق نیروهای ماشینکاری می‌باشد. در این مقاله، نیروها و ممان‌هایی که حین عملیات فرزکاری ایجاد می‌شوند، با استفاده از روابط نیرویی به‌دست‌آمده در مرجع [11] و با در نظر گرفتن هندسه‌ی برش در شرایط ماشینکاری مختلف تحت برنامه‌ای که در نرم‌افزار MATLAB نوشته شده، مدل‌سازی شده‌اند.

با ترکیب برنامه‌ی نوشته‌شده برای نیروهای فرزکاری و برنامه‌ی نوشته‌شده برای ارتعاشات اجباری میز هگزاپاد، نیروها و ممان‌های فرزکاری به‌عنوان نیروها و ممان‌های خارجی اعمال‌شده روی میز هگزاپاد در نظر گرفته می‌شوند؛ به این ترتیب، ماتریس‌های نیرو و ممان خارجی اعمال‌شده روی سکو به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{F}_{ext} = \left[F_x(\phi) \quad F_y(\phi) \quad F_z(\phi) \right]^T \tag{۷}$$

$$\mathbf{M}_{ext} = \left[0 \quad 0 \quad T_c(\phi) \right]^T \tag{۸}$$

در رابطهٔ فوق $T_c(\phi)$ ممان برشی لحظه‌ای و ϕ زاویهٔ لحظه‌ای درگیری ابزار می باشد [11].

بدین ترتیب میزان تغییر مکان‌ها و دوران‌های میز در جهات مختلف حرکتی و مقادیر فرکانس‌های تشدید آن در اثر نیروها و ممان‌های ایجاد شده در شرایط مختلف ماشینکاری قابل محاسبه می‌باشند.

مطالعه‌ی موردی ارتعاشات اجباری میز هگزاپاد در شرایط مختلف ماشینکاری

ارتعاش اجباری سکوی متحرک در اثر نیروهای هارمونیک فرزکاری و برای چهار حالت ماشینکاری متفاوت از نظر بارگذاری (خشنکاری و پرداختکاری) و نحوهٔ ماشینکاری (فرزکاری مخالف و موافق) مورد بررسی قرار گرفته است.

پارامتراهای ماشینکاری در هر کدام از شرایط خشنکاری و پرداختکاری قطعه‌ای با جنس Ti6Al4V توسط یک ابزار فرز شیار مارپیچ با سه لبه‌ی برشی و قطر ۲۰ mm به ترتیب زیر انتخاب شده‌اند:

خشنکاری: $a_e = ۲۰\text{mm},\ a = ۴\text{mm},\ f_z = ۰/۱۵\text{mm}$

پرداختکاری: $a_e = ۲۰\text{mm},\ a = ۱\text{mm},\ f_z = ۰/۱۰\text{mm}$

به‌طوری که a_e و a به‌ترتیب عمق بار عرضی و عمق بار محوری می‌باشند.

با در نظر گرفتن محدوده‌ی سرعت دورانی اسپیندل، ۲۰۰ تا ۲۰۰۰۰ دور بر دقیقه است و محدوده‌ی فرکانس نیروی تحریک f (Hz) از رابطه‌ی (۹) قابل محاسبه می‌باشد.

$$f = nZ/60 \qquad (۹)$$

در رابطه‌ی فوق Z تعداد لبه‌های برشی ابزار و n (rpm) سرعت دورانی اسپیندل می‌باشند.

تغییر مکان‌ها ودوران‌های سکوی متحرک در مقیاس فرکانس و برای بازهٔ فرکانسی ۱۰ تا ۱۰۰۰ هرتز، متناظر با محدوده‌ی سرعت دورانی اسپیندل، در تمامی شرایط خشنکاری و پرداختکاری برای هر یک از حالات فرزکاری مخالف و موافق مورد بررسی تحلیلی قرار گرفته است.

از آنجایی که تغییر در پیکربندی مکانیزم موجب تغییر در فرکانس‌های طبیعی و تشدید آن می‌شود [7-9]، در روند حل مسأله و به‌منظور تعیین دامنهٔ کاملی از فرکانس‌های تشدید مکانیزم، سکوی متحرک با موقعیت‌ها و جرم‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. در این تحقیق ارتعاشات مکانیزم با تغییر موقعیت سکوی متحرک در فضای کاری و با دو جرم مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. به این منظور، شش پیکربندی مختلف در محدوده‌ی فضای کاری انتخاب شده و در جدول (۱) ارائه شده‌اند.

فرکانس‌های تشدید میز هگزاپاد، با استفاده از روش تحلیلی ارائه‌شده در این مقاله، تحت نیروهای هارمونیک ماشینکاری و در تمامی شرایط خشنکاری و پرداختکاری برای هر یک از حالات فرزکاری مخالف و موافق مورد بررسی قرار گرفته و نتایج در جدول (۲) برای هر کدام از پیکربندی‌های جدول (۱) ارائه شده است.

جدول ۱ پیکربندی‌های منتخب برای بررسی ارتعاشات مکانیزم

	موقعیت مرکز سکو x, y, z (mm)	جرم سکو (Kg)
۱	۰, ۰, ۷۱۰	۴۰/۶
۲	۰, ۰, ۷۱۰	۹۰/۶
۳	۰, ۰, ۸۲۰	۴۰/۶
۴	۰, ۰, ۸۲۰	۹۰/۶
۵	۰, ۰, ۹۳۰	۴۰/۶
۶	۰, ۰, ۹۳۰	۹۰/۶

حداکثر دامنه‌های ارتعاشات سکوی متحرک تحت نیروهای هارمونیک ماشینکاری نیز با در نظر گرفتن شرایط ماشینکاری مختلف بررسی شده و نتایج در جدول (۳) برای هر کدام از پیکربندی‌های جدول (۱) ارائه شده است.

جدول ۲ فرکانس‌های تشدید میز هگزاپاد (Hz)

پیکربندی‌های جدول (۱)	۱	۲	۳	٤	٥	٦
فرکانس تشدید در راستای X	۲٤۰	۱٦۰	۱٦۰	۱۲۰	۱۲۰	۸۰
فرکانس تشدید در راستای Y	۲٤۰	۱٦۰	۱٦۰	۱۲۰	۱۲۰	۸۰
فرکانس تشدید در راستای Z	۹۲۰	٦۰۰	۷۲۰	٤۸۰	٦۰۰	٤۰۰
فرکانس تشدید حول محور X	۸٦۰	٥٦۰	٦۸۰	٤٤۰	٥٦۰	۳٦۰
فرکانس تشدید حول محور Y	۸٦۰	٥٦۰	٦۸۰	٤٤۰	٥٦۰	۳٦۰
فرکانس تشدید حول محور Z	۳٦۰	۳۲۰	۲٤۰	۲۰۰	۲۰۰	۱٦۰

جدول ۳ حداکثر دامنه‌های ارتعاشات میز هگزاپاد (بر حسب m)

پیکربندی‌های مختلف جدول (۱)			۱	۲	۳	٤	٥	٦
تغییر مکان	فرزکاری مخالف	خشنکاری	$۱/۰۷\times۱۰^{-٤}$	$۹/۹٦\times۱۰^{-٥}$	$۲/۲۱\times۱۰^{-٤}$	$۲/۰۹\times۱۰^{-٤}$	$٤/۰۲\times۱۰^{-٤}$	$٤/۱۷\times۱۰^{-٤}$
در راستای		پرداختکاری	$۱/۷٦\times۱۰^{-٥}$	$۱/۸۳\times۱۰^{-٥}$	$٤/۰٤\times۱۰^{-٥}$	$۳/٤۸\times۱۰^{-٥}$	$٤/٤۷\times۱۰^{-٥}$	$۷/۷۸\times۱۰^{-٥}$
X	فرزکاری موافق	خشنکاری	$۲/۷۷\times۱۰^{-٥}$	$۱/۹۹\times۱۰^{-٥}$	$٤/٥٤\times۱۰^{-٥}$	$۲/۲٥\times۱۰^{-٥}$	$۹/۷٥\times۱۰^{-٥}$	$۱/۱٦\times۱۰^{-٤}$
		پرداختکاری	$٤/۰٤\times۱۰^{-٦}$	$٤/۷٥\times۱۰^{-٦}$	$۱/۰۷\times۱۰^{-٥}$	$۳/۸۹\times۱۰^{-٦}$	$۲/۲٤\times۱۰^{-٥}$	$۲/٥٦\times۱۰^{-٥}$
تغییر مکان	فرزکاری مخالف	خشنکاری	$۱/۷۱\times۱۰^{-٤}$	$۱/۲۱\times۱۰^{-٥}$	$۲/۷٥\times۱۰^{-٤}$	$۲/٦۳\times۱۰^{-٤}$	$٥/۳٤\times۱۰^{-٤}$	$٥/۷۳\times۱۰^{-٤}$
در راستای		پرداختکاری	$۲/۷۱\times۱۰^{-٥}$	$۲/٤۸\times۱۰^{-٥}$	$٥/٦٥\times۱۰^{-٥}$	$٤/۰٦\times۱۰^{-٥}$	$۱/۰۹\times۱۰^{-٤}$	$۱/۱۷\times۱۰^{-٤}$
Y	فرزکاری موافق	خشنکاری	$۱/۸٤\times۱۰^{-٥}$	$۱/۹۲\times۱۰^{-٥}$	$٤/۳۲\times۱۰^{-٤}$	$۳/۱۲\times۱۰^{-٤}$	$۸/۲۱\times۱۰^{-٤}$	$۸/۷۳\times۱۰^{-٤}$
		پرداختکاری	$۳/۰۳\times۱۰^{-٥}$	$۳/۱۸\times۱۰^{-٥}$	$۷/۱۹\times۱۰^{-٥}$	$٥/۱۸\times۱۰^{-٥}$	$۱/۳٦\times۱۰^{-٤}$	$۱/٤٤\times۱۰^{-٤}$
تغییر مکان	فرزکاری مخالف	خشنکاری	$٥/۰۱\times۱۰^{-٥}$	$۹/٥٥\times۱۰^{-٦}$	$۸/۲۹\times۱۰^{-٥}$	$۹/٤۹\times۱۰^{-٥}$	$۳/۳۷\times۱۰^{-٤}$	$۳/۳۲\times۱۰^{-٤}$
در راستای		پرداختکاری	$۹/۳٥\times۱۰^{-۷}$	$۱/۸٤\times۱۰^{-٦}$	$۱/۳٥\times۱۰^{-٦}$	$۱/۷۹\times۱۰^{-٥}$	$٦/۰٤\times۱۰^{-٦}$	$٦/٦۰\times۱۰^{-٥}$
Z	فرزکاری موافق	خشنکاری	$٥/٤۰\times۱۰^{-٦}$	$۹/٤٤\times۱۰^{-٦}$	$۸/۱۹\times۱۰^{-٦}$	$۱/۰٦\times۱۰^{-٥}$	$۳/۳۱\times۱۰^{-٥}$	$۳/۲۸\times۱۰^{-٥}$
		پرداختکاری	$۹/٥۱\times۱۰^{-۷}$	$۱/۷۹\times۱۰^{-٦}$	$٤/٤۱\times۱۰^{-٦}$	$۱/۸٥\times۱۰^{-٦}$	$٥/۹٥\times۱۰^{-٦}$	$٦/۰۸\times۱۰^{-٦}$
دوران حول	فرزکاری مخالف	خشنکاری	$۹/۳۰\times۱۰^{-٥}$	$۱/۰۷\times۱۰^{-٤}$	$۱/٦۷\times۱۰^{-٤}$	$۱/۷٤\times۱۰^{-٤}$	$۲/٥۹\times۱۰^{-٤}$	$۲/٦۷\times۱۰^{-٤}$
محور X		پرداختکاری	$۱/٥٥\times۱۰^{-٥}$	$۱/۸٦\times۱۰^{-٥}$	$۲/۸۰\times۱۰^{-٥}$	$۳/۰٥\times۱۰^{-٥}$	$٤/۳۱\times۱۰^{-٥}$	$٤/۲۹\times۱۰^{-٥}$
	فرزکاری موافق	خشنکاری	$۱/۲٦\times۱۰^{-٤}$	$۱/٤۷\times۱۰^{-٤}$	$۲/۳۸\times۱۰^{-٤}$	$۲/٤٦\times۱۰^{-٤}$	$۳/٦٥\times۱۰^{-٤}$	$۳/۷۰\times۱۰^{-٤}$
		پرداختکاری	$۲/۱۳\times۱۰^{-٥}$	$۲/٥۱\times۱۰^{-٥}$	$٤/۰۱\times۱۰^{-٥}$	$٤/۱٥\times۱۰^{-٥}$	$٦/۱٦\times۱۰^{-٥}$	$٦/۲٥\times۱۰^{-٥}$
دوران حول	فرزکاری مخالف	خشنکاری	$٥/۲۷\times۱۰^{-٦}$	$۱/٤۱\times۱۰^{-٥}$	$۸/۷۳\times۱۰^{-٦}$	$۱/۰۷\times۱۰^{-٤}$	$۱/۸٥\times۱۰^{-٥}$	$۱/۷۸\times۱۰^{-٤}$
محور Y		پرداختکاری	$۱/۲۰\times۱۰^{-٦}$	$۲/٦٥\times۱۰^{-٦}$	$۱/۷٦\times۱۰^{-٦}$	$۱/۹٦\times۱۰^{-٥}$	$۲/۷۱\times۱۰^{-٦}$	$۲/۹۹\times۱۰^{-٥}$
	فرزکاری موافق	خشنکاری	$۳/۹٥\times۱۰^{-٥}$	$٥/۰۹\times۱۰^{-٥}$	$۷/۱۸\times۱۰^{-٤}$	$۷/٥۳\times۱۰^{-٤}$	$۱/۱۳\times۱۰^{-۳}$	$۱/۰۹\times۱۰^{-۳}$
		پرداختکاری	$٦/۷٦\times۱۰^{-٦}$	$۸/۹۳\times۱۰^{-٦}$	$۱/۲۲\times۱۰^{-٥}$	$۱/۲۷\times۱۰^{-٥}$	$۱/۸۸\times۱۰^{-٥}$	$۱/۹۰\times۱۰^{-٥}$
دوران حول	فرزکاری مخالف	خشنکاری	$۲/۲۱\times۱۰^{-٤}$	$۱/٦٤\times۱۰^{-٤}$	$۱/۰۸\times۱۰^{-۳}$	$۲/۱٥\times۱۰^{-٤}$	$۲/۷٥\times۱۰^{-٤}$	$۲/۸۰\times۱۰^{-۳}$
محور Z		پرداختکاری	$٤/۲۹\times۱۰^{-٥}$	$۳/۱۲\times۱۰^{-٥}$	$۲/۰٦\times۱۰^{-٤}$	$۳/٤۲\times۱۰^{-٥}$	$٤/٥۱\times۱۰^{-٥}$	$٦/۳۷\times۱۰^{-٤}$
	فرزکاری موافق	خشنکاری	$۲/۳٥\times۱۰^{-٤}$	$۱/۸۲\times۱۰^{-٤}$	$۱/۰۸\times۱۰^{-۳}$	$۱/٦۹\times۱۰^{-٤}$	$۳/۰٤\times۱۰^{-٤}$	$۲/۷۱\times۱۰^{-۳}$
		پرداختکاری	$٤/٤٦\times۱۰^{-٥}$	$۳/۲٤\times۱۰^{-٥}$	$۲/۰۸\times۱۰^{-٤}$	$۳/۳۱\times۱۰^{-٥}$	$٥/۰٥\times۱۰^{-٤}$	$٦/٤٥\times۱۰^{-٤}$

با توجه به جدول (۲)، کم‌ترین فرکانس‌های تشدید مکانیزم مربوط به پیکربندی است که در آن سکوی متحرک با بیش‌ترین جرم بار روی آن در بالاترین موقعیت در مرز فضای کاری قرار می‌گیرد و این حالتی است که طول پایه‌ها بیش‌ترین مقدار ممکن یا به بیان دیگر کم‌ترین ضریب سفتی را دارند. از طرفی، با توجه به جدول (۳)، حداکثر تغییر مکان‌های سکو مربوط به موقعیتی است که مرکز سکوی متحرک در بالاترین موقعیت محدوده‌ی فضای کاری قرار داشته و نیروهای عملیات فرزکاری مخالف در شرایط خشنکاری روی آن اعمال می‌شود. دلیل این امر را می‌توان در کاهش سفتی مکانیزم با قرارگیری مرکز سکو در بالاترین موقعیت و زیاد بودن نیروهای ناشی از شرایط خشنکاری در عملیات فرزکاری مخالف دانست. با کاهش طول پایه‌ها در موقعیت‌های پایین‌تر سکوی متحرک، سفتی معادل پایه‌ها و به تناسب آن سفتی معادل مکانیزم افزایش می‌یابد. این تأثیر و نیز کاهش جرم بار روی سکو دو عامل مهم در افزایش فرکانس‌های طبیعی و تشدید مکانیزم می‌باشند. قرارگیری مرکز سکو در موقعیت‌های پایین‌تر، با افزایش سفتی معادل مکانیزم، موجب افزایش استحکام مکانیزم در برابر نیروهای ماشینکاری زیاد می‌شود و در این موقعیت‌ها تغییر مکان‌های ناشی از این نیروها به‌تناسب کم‌تر خواهند بود.

ازآن‌جایی که مقدار تغییر مکان میز متناسب با مقدار نیروی اعمال شده روی آن می‌باشد، تمام عوامل برشی و هندسی مؤثر در تغییر مقدار نیروهای برشی، روی مقادیر تغییر مکان‌های میز مؤثر می‌باشند. به‌عنوان مثال تغییر در پیشروی، عمق برش و تعداد لبه‌های ابزار ارتباط مستقیم و تغییر سرعت دورانی اسپیندل ارتباط معکوس با تغییر نیروهای برشی دارد [12]؛ بدین ترتیب، تغییرات این عوامل موجب تغییر در مقادیر تغییر مکان‌های سکو خواهد شد.

بحث و نتیجه‌گیری

در این تحقیق، ارتعاشات اجباری میز هگزاپاد مورد مطالعه قرار گرفته است. با در نظر گرفتن نیروی خارجی اعمال‌شده روی سکوی متحرک میز هگزاپاد به‌صورت یک نیروی سینوسی متغیر با زمان و با فرکانس و دامنه‌ی ثابت، ارتعاشات اجباری سکو مورد بررسی قرار گرفته و سپس فرکانس‌های تشدید و میزان تغییر مکان‌های سکو، با استفاده از برنامه‌ی نوشته‌شده در محیط نرم‌افزار Matlab، محاسبه شده‌اند. صحت نتایج به‌دست‌آمده از روش تحلیلی با شبیه‌سازی به روش اجزای محدود و با استفاده از تحلیل هارمونیک در نرم‌افزار ANSYS نیز مورد بررسی قرار گرفته است. علاوه بر این، با مدل‌سازی نیروهای فرزکاری، ارتعاش اجباری مکانیزم تحت نیروهای خشنکاری و پرداختکاری در روش‌های فرزکاری مخالف و موافق مورد مطالعه قرار گرفته و دامنه و فرکانس‌های تشدید حاصل از این نیروها نیز محاسبه شده‌اند. در نهایت می‌توان اظهار داشت که برای جلوگیری از ایجاد ناپایداری دینامیکی حین عملیات ماشینکاری در موقعیت‌های بالایی قرارگیری سکو، می‌بایست از سرعت‌های برشی بیش‌تر و نیروهای برشی کم‌تر استفاده نمود. بنابراین، موقعیت‌های بالایی قرارگیری سکو برای ماشینکاری سرعت بالا مناسب‌تر خواهند بود. عملیات پرداختکاری نیز در سرعت‌های برشی زیاد و پیشروی و عمق بار کم انجام می‌شود، بنابراین نیروهای ماشینکاری وارد بر سکو در این عملیات به تناسب کم‌تر می‌باشند. بدین ترتیب، موقعیت‌های بالایی قرارگیری سکو برای عملیات پرداختکاری مناسب می‌باشند. به‌منظور دست‌یابی به صافی سطح مناسب در قطعه‌ی پرداختکاری‌شده در موقعیت‌های بالایی قرارگیری مرکز سکوی متحرک نیز، استفاده از روش فرزکاری موافق مناسب‌تر خواهد بود. در

موقعیت‌های پایین‌تر قرارگیری سکو در محدوده‌ی فضای کاری، ماشینکاری در سرعت‌های برشی کم‌تر امکان‌پذیر است و این موقعیت‌ها برای عملیات خشنکاری مناسب‌تر خواهند بود؛ علاوه بر این، برای کاهش شوک و ضربه‌ی براده‌برداری ناشی از عملیات خشنکاری در موقعیت‌های پایینی قرارگیری سکو، استفاده از روش فرزکاری مخالف مناسب می‌باشد.

پیوست

مشخصات فیزیکی مکانیزم به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

شعاع سکوی متحرک:	۱۷۵ mm
شعاع سکوی ثابت:	٤۰۰ mm
حداکثر طول هر پایه:	۹٦۸/۹ mm
حداقل طول هر پایه:	۷٦۰/۲ mm
حداکثر جرم سکوی متحرک و بار روی آن:	۹۰/٦ Kg
حداقل جرم سکوی متحرک و بار روی آن:	٤۰/٦ Kg
حداکثر کورس حرکتی در جهات X و Y:	±۱۳۰ mm
حداکثر کورس حرکتی در جهت Z:	۲۲۰ mm
استهلاک هر پایه، C_{Ti}، در پایین‌ترین موقعیت:	۱۰۳۱ Ns/m
استهلاک هر پایه، C_{Ti}، در موقعیت میانی:	۷۲٦ Ns/m
استهلاک هر پایه، C_{Ti}، در بالاترین موقعیت:	۳٦٦ Ns/m
سفتی هر پایه، K_{Ti}، در پایین‌ترین موقعیت:	N/m۲/۵۰×۱۰^۸
سفتی هر پایه، K_{Ti}، در موقعیت میانی:	N/m۱/٤٦×۱۰^۸
سفتی هر پایه، K_{Ti}، در بالاترین موقعیت:	N/m۱/۰۵×۱۰^۸

- با در نظر گرفتن قضیه‌ی محورهای موازی [13] و با در نظر گرفتن $^{P}\mathbf{I}_p$، به‌عنوان تانسور لختی سکوی متحرک و بار روی آن در چارچوب متحرک، تانسور لختی سکو و بار روی آن در چارچوب مرجع، $\mathbf{I}_p$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{I}_p = \mathbf{R}({}^{P}\mathbf{I}_p + m_p \begin{bmatrix} r_y^2 + r_z^2 & -r_x r_y & -r_x r_z \\ -r_x r_y & r_x^2 + r_z^2 & -r_y r_z \\ -r_x r_z & -r_y r_z & r_x^2 + r_y^2 \end{bmatrix})\mathbf{R}^T$$

به‌طوری که ماتریس دوران $\mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} C\theta_z C\theta_y & -S\theta_z C\theta_x + C\theta_z S\theta_y S\theta_x & S\theta_z S\theta_x + C\theta_z S\theta_y C\theta_x \\ S\theta_z C\theta_y & C\theta_z C\theta_x + S\theta_z S\theta_y S\theta_x & -C\theta_z S\theta_x + S\theta_z S\theta_y C\theta_x \\ -S\theta_y & C\theta_y S\theta_x & C\theta_y C\theta_x \end{bmatrix}$$

$$C\theta_x = \cos(\theta_x); \qquad S\theta_x = \sin(\theta_x);$$

بردار $\mathbf{r} = [r_x \quad r_y \quad r_z]^T$، بردار موقعیت مرکز جرم سکوی متحرک بارگذاری شده در چارچوب مرجع، به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}\,\mathbf{r}_o$$

در رابطه‌ی فوق، $\mathbf{r}_o$ بردار موقعیت مرکز جرم سکوی متحرک بارگذاری‌شده در چارچوب متحرک می‌باشد.

با در نظر گرفتن $\mathbf{n}_i$ به‌عنوان بردار یکه‌ی هر پایه و $\mathbf{q}_i$ به‌عنوان بردار موقعیت نقطه‌ی مفصلی iام در محل اتصال سکوی متحرک به هر کدام از پایه‌ها در چارچوب مرجع [13]، ماتریس ژاکوبین معکوس مکانیزم هگزاپاد به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1^T & (\mathbf{q}_1 \times \mathbf{n}_1)^T \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{n}_6^T & (\mathbf{q}_6 \times \mathbf{n}_6)^T \end{bmatrix}$$

مراجع

1. Dohner, J.L., Kwan, C.M. and Regerlbrugge, M.E., "Active Chatter Suppression in an Octahedral

Hexapod Milling Machine: A Design Study", *In Proc. of SPIE-The International Society for Optical Engineering*, Vol. 2721, pp. 316-325, (1996).

2. Hardage, D.S. and Wiens, G.J., "Modal analysis and modeling of a parallel kinematic machine", *J. Manuf. Sci. Eng.*, Vol. 10, pp. 857-862, (1999).
3. Wiens, G.J. and Hardage, D.S., "Structural dynamics and system identification of parallel kinematic machines", *In Proc of IDETC/CIE*, 99671, (2006).
4. Ting, Y., Chen, Y.-S. and Jar, H.-C., "Modeling and control for a Gough-Stewart platform CNC machine", *J. Robotic Syst.*, Vol. 21, pp. 609-623, (2004).
5. Mukherjee, P., Dasgupta, B. and Mallik, A.K., "Dynamic stability index and vibration analysis of a flexible Stewart platform", *J. Sound Vib.*, Vol. 307, pp. 495–512, (2007).
6. Hong, D., Kim, S., Choi, W.C. and Song, J.-B., "Analysis of machining stability for a parallel machine tool", *Mech. Base Des. Struct. Mach.*, Vol. 31, pp. 509-528, (2003).
7. Mahboubkhah, M., Nategh, M.J. and Esmaeilzadeh Khadem, S., "Vibration analysis of machine tools' hexapod table", *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, Vol. 38, pp. 1236-1243, (2008).
8. Mahboubkhah, M., Nategh, M.J. and Esmaeilzadeh Khadem, S., "A Comprehensive Study on the Free Vibration of Machine Tools' Hexapod Table", *Int. J. Adv. Manuf. Technol.,* Vol. 40, pp. 1239-1251, (2009).
9. Pedrammehr, S., Mahboubkhah, M. and Khani, N., "Natural Frequencies and Mode Shapes for Vibrations of Machine Tools' Hexapod Table", *1st International Conference on Acoustics and Vibration ISAV 2011*, Tehran, Iran, Dec. 21-22, (2011).
10. Cheng, K., *"Machining Dynamics, Fundamentals, Applications and Practices"*, (2009), Springer-Verlag London Limited, UK.
11. Altintas, Y., *"Manufacturing Automation, Metal Cutting Mechanics, Machine Tool Vibrations and CNC Design"*, Cambridge University Press, UK, (2000).
12. Yangui, H., Zghal, B., Kessentini, A., Chevallier, G., Rivière, A., Haddar, M. and Karral, C., "Influence of Cutting and Geometrical Parameters on the Cutting Force in Milling", *Scientific Research, Engineering,* Vol. 2, pp. 751-761, (2010).
13. Pedrammehr, S., Mahboubkhah, M. and Pakzad, S., "An improved solution to the inverse dynamics of the general Stewart platform", *IEEE International Conference on Mechatronics ICM 2011*, Istanbul, Turkey, April 13-15, (2011).